

**IB 131-2015 / 045**

**Nicht-reflektierende Ränder zur einfachen  
Anwendung in der FEM bei transienten und  
harmonischen Analysen von  
Faserverbundstrukturen**

Christoph Heinze



**Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik  
Braunschweig**

September / 2015

**IB 131-2015 / 045**

**Nicht-reflektierende Ränder zur einfachen Anwendung in der  
FEM bei transienten und harmonischen Analysen von  
Faserverbundstrukturen**


Braunschweig, September, 2015

Der Bericht umfasst:

26 Seiten



Institutsleiter:  
Prof. Dr.-Ing. M. Wiedemann



Verfasser:  
Christoph Heinze



Leiter der Abteilung:  
Peter Wierach

# **Nicht-reflektierende Ränder zur einfachen Anwendung in der FEM bei transienten und harmonischen Analysen von Faserverbundstrukturen**



Wissenschaftlicher Bericht  
verfasst am 15.09.2015

Christoph Heinze  
Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik  
Abteilung Multifunktionswerkstoffe  
Transferzentrum MRO & Cabin Upgrade  
Sportallee 54a  
22335 Hamburg

---

## Kurzreferat

In diesem wissenschaftlichen Bericht wird eine Variante eines nicht-reflektierenden Randes für den Einsatz in dynamischen FEM-Simulationen vorgestellt. Diese absorbierende Randschicht ist einfach umzusetzen und sowohl für den Einsatz in transienten wie auch harmonischen Berechnungen geeignet. Der Fokus der Arbeit liegt auf der Abbildung von Plattenwellen im Ultraschallbereich, sogenannten Lamb-Wellen, in anisotropen Laminaten. Es werden Vorschläge zum Aufbau der Randschicht und für geeignete Parameter gemacht. Die Wirksamkeit der Methode wird in transienten Berechnungen gezeigt. Bei harmonischen Analysen existiert für unidirektionale CFK-Platten ein Abgleich mit einem Verfahren das auf der Steifigkeitsmatrizen-Methode basiert. Zusätzlich werden neue Ergebnisse für eine quasi-isotrope Platte vorgestellt.

## Abstract

A type of non-reflecting boundary for use in dynamic FEM simulations is presented in this report. This absorbing boundary layer is easy to realize and well suited for both transient and harmonic calculations. This work is focused on Lamb waves, which are ultrasonic plate waves, and anisotropic layered materials. Suggestions for modeling the absorbing layer to minimize reflections are made. The capabilities of this technique are shown with transient calculations. For harmonic analysis on single layer CFRP plates a comparison is done with results obtained via an approach based on the stiffness matrix method. Additional results for a quasi-isotropic plate are presented.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Motivation</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Nicht-reflektierende Ränder</b>	<b>7</b>
3.1	Überblick über bekannte Ansätze . . . . .	7
3.2	Exponentiell ansteigende Dämpfung . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Die absorbierenden Randschicht in ANSYS</b>	<b>10</b>
4.1	Modifikation des Ansatzes . . . . .	10
4.2	Modellaufbau . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Die absorbierende Randschicht in der harmonischen Analyse</b>	<b>14</b>
5.1	Harmonische Analysen in der FEM . . . . .	14
5.2	Anwendung UD-CFK-Platte . . . . .	16
5.3	Anwendung quasi-isotrope CFK-Platte . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Die absorbierende Randschicht in der transienten Analyse</b>	<b>22</b>
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>25</b>
	<b>Literatur</b>	<b>26</b>

# Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

## Abkürzungen:

CFK	Kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff
FEM	Finite-Elemente-Methode
SHM	Structural Health Monitoring
SMM	Steifigkeitsmatrizen-Methode
UD	unidirektional

## Formelzeichen:

$\alpha$	Verlustfaktor der komplexen Steifigkeit
$A_0$	erster antisymmetrischer Lamb-Wellen-Mode
$\beta$	steifigkeitsproportionaler Anteil der Rayleigh-Dämpfung
$f$	Frequenz
$f_0$	Mittenfrequenz, Anregungsfrequenz
$\mathbf{F}$	Lastvektor
$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{M}$	Massenmatrix
$\phi$	Orientierung in der Plattenebene
$R$	Radius
$S_0$	erster symmetrischer Lamb-Wellen-Mode
$u$	Verschiebung
$\mathbf{u}$	Verschiebungsvektor
$\xi$	Dämpfungsrate, Dämpfungsgrad

# 1 Einleitung

Viele Aufgabenstellungen in der Dynamik, die mit numerischen Methoden bearbeitet werden, profitieren von Modellrändern die unbegrenzte Bereiche abbilden. Häufigste Motivation ist die Beschränkung der Modellgrenzen um den Berechnungsaufwand gering zu halten, ohne dass das Ende des Modells Reflexionen hervorruft. Dabei wird an solchen Rändern Schwingungsenergie aus dem simulierten System genommen. Verfahren wie die Randelementmethode (BEM) können direkt offene Ränder abbilden. Bei der Finiten-Elemente-Methode (FEM) ist dagegen der Rand des Modells mit dem physischen Ende des simulierten Bereichs gleichzusetzen, solange keine besonderen Randbedingungen vorhanden sind. Offene Ränder können nicht ohne weiteres in der FEM definiert werden und stellen damit eines der größten Nachteile der sonst sehr flexiblen Methode dar. Regelmäßige Veröffentlichungen zu dieser Thematik zeigen jedoch deren Bedeutung für viele Disziplinen. Verbreitet sind spezielle Ansätze für offene Ränder in der Akustik, um die Abstrahlung in den unbegrenzten Raum, das sogenannte Freifeld, abzubilden. Bei Erdbebensimulationen verwendet die Geologie solche Randbedingungen für Detailbetrachtungen begrenzter Gebiete. Da dieser Grundgedanke in vielen Anwendungsgebieten vorkommt, sind verschiedene Bezeichnungen gebräuchlich. Zu den verbreitetsten Begriffen gehören *absorbierende Randbedingung*, *infiniter Rand* oder *nicht-reflektierender Rand*. Unter anderem bei der Simulation der Wellenbewegung in den Ozeanen werden *radiation boundary conditions* verwendet.

Die entscheidende Frage ist, wie die Modellabmessungen limitiert werden können ohne dass die künstlichen Grenzen Einfluss auf die Genauigkeit haben. So allgemein formuliert, trifft diese Frage genauso auf Experimente zu. Gerade die in diesem Bericht dargestellte Methode funktioniert prinzipiell auch bei Versuchen an realen Bauteilen, da die FEM sehr nah an der physischen Realität arbeitet. Zäh-elastische Materialien haben sich im Versuchsalldag als geeignet erwiesen, um unerwünschte Reflexionen von Wellen an Plattenrändern zu verringern. Auch wenn eine spezieller Verlauf der Dämpfungseigenschaften, wie er in den numerischen Berechnungen verwendet wird, praktisch unmöglich zu realisieren ist.

## 2 Motivation

Die konkrete Motivation des Autors, sich mit nicht-reflektierenden Rändern in der FEM zu beschäftigen, kommt aus der Arbeit mit der Wellenausbreitung in Festkörpern. In der Akustik würde man den Begriff Körperschall verwenden. Im konkreten Fall sind es jedoch Wellen im Ultraschallbereich, mit denen im Rahmen der kontinuierlichen Strukturüberwachung (engl. Struktural Health Monitoring, SHM) Defekte in plattenartigen Strukturen gefunden werden sollen. Diese Lamb-Wellen haben die Eigenschaft sich infolge geringer Dämpfung über weite Strecken auszubreiten. In der Auslegung entsprechender Überwachungssysteme hat dies theoretisch den Vorteil, dass eine geringe Zahl an Sendern große Flächen abdecken kann. Insbesondere bei der Simulation von Teilbereichen der Struktur hat dies allerdings den Nachteil unerwünschter Reflexionen am Modellrand. Erschwerend kommt hinzu, dass gleichzeitig immer mehrere Wellenmoden mit stark unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten angeregt werden. Der einfachste Ansatz Reflexionen zumindest zu verzögern, besteht in der Modellierung eines langen Auslaufbereichs, der jedoch mit deutlich erhöhtem Rechenaufwand erkauft wird.

In diesem Bericht wird der Ansatz eines absorbierenden Randbereiches vorgestellt. Die dort verwendete exponentiell ansteigende Dämpfung hat den Vorteil Reflexionen trotz Änderung der Materialeigenschaften am Übergang zu minimieren. Gleichzeitig genügen wenige Elemente für eine deutliche Amplitudenverringern. Diese Methode hat den Vorteil, dass sie praktisch in jeder FEM-Umgebung und für beliebige Geometrien und Materialien realisiert werden kann. Die Modellierung eines solchen Randes erfordert, verglichen mit anderen Methoden, nur geringen Zusatzaufwand. Weiterhin eignet sie sich sowohl für harmonische Analysen als auch transiente Berechnungen mit einem begrenzten Anregungsspektrum. Der absorbierende Rand nimmt einen gewissen Raum ein und erhöht folglich die Rechenlast. In den meisten Fällen kann damit allerdings ein erheblicher Teil der Geometrie eingespart werden.



## 3 Nicht-reflektierende Ränder

Im folgenden Abschnitt soll zuerst ein kurzer Überblick darüber gegeben werden wie bei der FEM nicht-reflektierende Ränder realisiert werden und für welche Einsatzgebiete sie geeignet sind. Der Fokus liegt dabei auf Wellen in Fluiden und Festkörpern. Anschließend wird der aus der Literatur bekannte absorbierende Rand mit exponentiell ansteigender Dämpfung vorgestellt.

### 3.1 Überblick über bekannte Ansätze

Grundsätzlich kann zwischen nicht-reflektierenden Randbedingungen und absorbierenden Randschichten unterschieden werden. Bei Ersteren muss eine analytische Formulierung gefunden werden, die die Schwingung am Rand der Enden lässt ohne eine Reflexion zu erzeugen. Sind solche Randbedingungen korrekt definiert, kann im Idealfall ein perfekt reflexionsfreier Rand erzeugt werden, der minimalen Einfluss auf die Berechnungszeit des Modells hat. Der nötige Aufwand zum Finden passender Formulierungen hängt von der Komplexität der Aufgabe, dem Modell und der angestrebten Genauigkeit ab. Zu einer Problemstellung passende Randbedingungen sind folglich nicht universell einsetzbar. Absorbierende Randschichten sind je nach verwendetem Ansatz flexibler, da ihre Wirkung weniger stark von Faktoren wie beispielsweise Schwingungsrichtung oder Frequenz der Welle abhängt. Die in eine solche Randschicht eindringende Welle verliert über die darin zurückgelegte Strecke Energie. Ist die Schicht gut an die Aufgabe angepasst, gibt es keine oder nur minimale Reflexionen. Allerdings kann gerade bei komplizierten Modellen ein zusätzlicher mehrschichtiger Rand deutlich die Modellgröße erhöhen. Einen guten Überblick und eine Klassifizierung der verschiedenen Ansätze bietet die Dissertation von Appelö [1]. Kommerzielle FEM-Software bietet infinite Elemente und Randbedingungen für einige Anwendungsgebiete, wie etwa elektrische, magnetische oder thermische Felder [2]. Dabei werden sowohl harmonische als auch transiente Berechnungen abgedeckt. Weit verbreitet ist der Ansatz des *Perfectly Matched Layer* (PML). Dieser Typ von absorbierender Randschicht ist Stand der Technik bei der Simulation elektromagnetische Felder und ist auch bedingt für Schallausbreitung in Fluiden geeignet [3]. Bei der harmonischen Analyse von Schallereignissen sind solche Schichten theoretisch in der Lage Druckwellen reflexionsfrei aufzunehmen. Durch die Diskretisierung der FE-Modelle funktioniert dies allerdings nicht vollständig. Winzige Reflexionen sind die Folge. In der Literatur finden sich Vorschläge wie diese Methode für transiente Vorgänge erweitert werden kann [4]. Absorbierende Randbedingungen für den Einsatz im Zeitbereich existieren auch in kommerzieller FEM-Software, sind jedoch wieder beschränkt auf Fluide [5]. Zusätzlich muss der absorbierende Rand auf Kugeloberfläche liegen, wodurch Modellgröße und Modellierungsaufwand deutlich steigen. Dies gilt insbesondere bei Strukturen, bei denen sich eine Abmessung deutlich von den anderen beiden unterscheidet, wie etwa bei Platten und Balken.

Infinite Ränder für dynamische Vorgänge in Festkörpern sind in kommerzieller Software kaum zu finden. Im Gegensatz zu Fluiden sind neben den Kompressionswellen auch andere Wellenarten vorhanden, wodurch eine analytische Beschreibung von offenen Randbedingungen erschwert wird. Für die Analyse des Schwingungsverhaltens unbegrenzter Strukturen gibt es die Möglichkeit Randknoten des Modells mit Feder-Dämpfer-Elementen auszustatten deren angepasste Impedanz eine Reflexion verhindert [6]. Diese infiniten Randbedingungen sind frequenzabhängig, wodurch sie wieder nur für eine harmonische Anregung geeignet sind. Zusätzlich stellt sich die Frage wie diese Methode bei anisotropen Materialien umgesetzt werden kann. Explizite Berechnungsverfahren werden häufig für nicht-lineare transiente Vorgänge, wie seismische Analysen von Bauwerken und Crashesimulationen verwendet. Durch die hohe Verbreitung solcher Berechnungen sind nicht-reflektierende Ränder sehr oft Teil entsprechender Programme. Auch diese Ränder beruhen auf angepassten Impedanzen. Aufgrund der deutlich größeren Flexibilität werden für die Berechnung der Lamb-Wellenausbreitung vom Autor jedoch implizite Berechnungsverfahren bevorzugt. Für diesen Fall bieten FEM-Programme keine fertigen Lösungen an und auch in der Literatur finden sich kaum passende Lösungsvorschläge.

### 3.2 Exponentiell ansteigende Dämpfung

Die Arbeit von Liu und Quek Jerry beschreibt einen weiteren Ansatz für eine absorbierende Randschicht [7]. Das Vorgehen ist dabei intuitiv und lässt sich in den meisten FEM-Umgebungen realisieren. Der Rand des Modells wird mit steifigkeitsproportionalen Dämpfungseigenschaften versehen, die sich an physikalischer Materialdämpfung orientieren. Als Vorteil, gegenüber bekannten nicht-reflektierenden Rändern für Festkörper, wird die Eignung für komplexe Wellenarten wie Lamb-Wellen genannt. Entscheidend ist hierbei wie die Randschicht aufgebaut ist, damit am Übergang Reflexion minimiert wird und gleichzeitig möglichst wenige Elemente die Wellenenergie maximal absorbieren. Vorgeschlagen wird eine zum Rand hin exponentiell ansteigende Dämpfung, die einen idealen Kompromiss aus Änderung der Materialkennwerte und Absorptionsvermögen darstellt.

Die Dämpfung im FE-Modell realisieren die Autoren indem die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  um einen imaginären Anteil ergänzt und damit komplexwertig wird (Gl. 3.1). Mit der Begründung, dass die Energiedissipation in den meisten Metallen in weiten Bereichen unabhängig von der Frequenz  $f$  ist, wird der Verlustfaktor  $\alpha$  auch als frequenzunabhängig definiert. Weitere Größen sind die Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , der Vektor der Knotenverschiebungen  $\mathbf{u}$  und der Vektor der von außen auf das System einwirkenden Kräfte  $\mathbf{F}$ .

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + (1 + i\alpha)\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.1)$$

Der dämpfende Rand wird in  $n$  Abschnitte unterteilt über den sich der Verlustfaktor  $\alpha_k$  ändert.  $\alpha_0$  ist der Verlustfaktor des ersten Bereichs und der Faktor  $\zeta$  bestimmt die Geschwindigkeit mit der die Dämpfung über die Abschnitte wächst. Der konkrete Wert für  $\zeta$  wird dabei iterativ bestimmt, genauso wie die Länge des absorbierenden Randes. Dabei wird die Anzahl der Unterteilungen gleich belassen und die maximal auftretende Amplitude als entscheidendes Kriterium identifiziert, damit die Schwingungen genug Raum zum Ausklingen haben.

$$\alpha_k = \alpha_0 \cdot \zeta^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

Als Beispiel wird eine harmonische Analyse einer isotropen homogenen Platte mit dem beschriebenen Rand durchgeführt und mit etablierten Methoden verglichen. Dabei ergibt sich nur ein minimaler Unterschied zur *strip element method* (SEM), die ohne zusätzliche Mittel offene Ränder abbilden kann.

## 4 Die absorbierenden Randschicht in ANSYS

Im diesem Kapitel wird beschrieben wie der absorbierende Rand aus der Veröffentlichung von Liu und Quek Jerry für eigene Anwendungen modifiziert wurde. Anschließend wird auf die Modellierung in ANSYS eingegangen.

### 4.1 Modifikation des Ansatzes

In Abschnitt 3.2 wurde eine Methode vorgestellt mit der offene Ränder bei geringem Modellierungsaufwand in FE-Programmen implementiert werden können. Ein großer Vorteil dieser Ränder ist ihre Fähigkeit unterschiedlichste Wellenarten zu absorbieren, ohne dass spezielle Anpassungen notwendig sind. Potentiell ist diese Methode flexibler als in dem Artikel beschrieben und nicht nur für harmonische Berechnungen geeignet. Das Ziel ist dabei solche Ränder in 2D- und 3D-Simulationen von Lamb-Wellen in geschichteten Faserverbunden und sowohl bei harmonischen als auch transienten Berechnungen mit ANSYS verwenden zu können. Lamb-Wellen sind Plattenwellen, die sich in unterschiedlichen Moden ausbreiten [8, 9]. Grundsätzlich lassen sich diese in symmetrische und anti-symmetrische unterteilen. Mit steigender Anregungsfrequenz steigt auch die Zahl der auftretenden Moden. Für die Überwachung von Strukturen wird jedoch häufig der Frequenzbereich nach oben begrenzt, damit nur der erste symmetrische  $S_0$  und der erste anti-symmetrische Mode  $A_0$  auftreten. Bei anisotropen Werkstoffen können die Wellenmoden Schwingungskomponenten in alle drei Raumrichtungen besitzen, wodurch sie per Definition keine  $A_0$ - bzw.  $S_0$ -Moden sind. In der Literatur hat sich für diese Fälle das Präfix *quasi*- durchgesetzt. In diesem Bericht wird jedoch darauf verzichtet. Durch den stets symmetrischen Aufbau der Platten können die Schwingungsmoden weiterhin anhand ihrer Symmetrieeigenschaften unterschieden werden.

Eine entscheidende Modifikation gegenüber dem ursprünglichen Ansatz ist der Einsatz von Rayleigh-Dämpfung statt einer komplexen Steifigkeit. Dabei wird analog nur der steifigkeitsproportionale Anteil, die sogenannte  $\beta$ -Dämpfung verwendet, die in ANSYS direkt für jedes Material definiert werden kann. Für den allgemeineren Fall der transienten Analyse lautet die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \beta\mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}. \quad (4.1)$$

Die exponentiell ansteigende Dämpfung berechnet sich genauso wie in Gleichung 3.2, allerdings besteht hier ein Abschnitt mit einem konstanten Wert für  $\beta$  nur aus einem Element (Gl. 4.2). Gleichzeitig wird der Wert für  $\zeta$  geringer gewählt. Dadurch sind im Ergebnis die Änderungen in den Materialeigenschaften zwischen den einzelnen Abschnitten geringer und Reflexionen unwahrscheinlicher, ohne dass die Anzahl der benötigten Elemente für den Randbereich wächst.

$$\beta_k = \beta_0 \cdot \zeta^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.2)$$

In der Arbeit von Liu und Quek Jerry wird der Verlustfaktor  $\alpha$  unabhängig von der Frequenz definiert, mit der Begründung, dass die Energiedissipation für viele Metalle über weite Frequenzbereiche konstant ist. Dies ist jedoch für Modellierung der absorbierenden Randschicht unerheblich, da keine realistische Abbildung von Materialien angestrebt wird, sondern eine künstliche Modellgrenze. Vielmehr führt dieses Vorgehen zu frequenzabhängigen Dämpfungsrate. Alternativ dazu wird vorgeschlagen die Dämpfungsrate  $\zeta$  konstant zu lassen, wodurch die Amplitudenabnahme von zwei aufeinander folgenden Maxima  $A_1$  und  $A_2$  einer monofrequenten Schwingung identisch für jede Frequenz ist (Gl. 4.4). Dies kann nur bei harmonischer Anregung ideal funktionieren. Jedoch können auch im transienten Fall sehr gute Ergebnisse erzielt werden, wie in Kapitel 6 gezeigt wird.

$$\beta_0 = \frac{2 \cdot \zeta}{\omega} = \frac{\zeta}{\pi f_0} \quad (4.3)$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad \text{mit } \delta = \ln \left( \frac{A_1}{A_2} \right) \quad (4.4)$$

Der Wert  $\beta_k$  für jedes der  $n$  Elemente ergibt sich dann in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz  $f_0$ , einer konstanten Dämpfungsrate  $\zeta$  und der ebenfalls konstanten Basis  $\zeta$  des exponentiellen Wachstums zu

$$\beta_k = \frac{\zeta}{\pi f_0} \cdot \zeta^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.5)$$

## 4.2 Modellaufbau

Mit dem im vorherigen Abschnitt beschriebenen Ansatz konnten erfolgreich transiente und harmonische Berechnungen durchgeführt werden. Sowohl 2D-Modelle von Plattenquerschnitten als auch 3D-Modelle geschichteter Werkstoffe können auf diese Weise nahezu reflexionsfrei begrenzt werden. Grundsätzlich sind diese Ränder für beliebig komplexe Geometrien und Werkstoffe geeignet. Für den Einsatz bei Laminaten und anisotropen Werkstoffen genügt es, das Material des Bauteils in der Randschicht fortzusetzen und für jedes Element  $\beta$ -Dämpfung festzulegen, wie in Gleichung 4.5 beschrieben.

Abbildung 4.1 zeigt das 3D-Modell schematisch in der Draufsicht. Hier wird nur ein Viertel der Platte modelliert und der untere und der linke Rand sind mit Symmetrierandbedingungen versehen. Die globalen Koordinaten sind  $x$ ,  $y$  und  $z$  mit dem Zentrum der Platte und dem Anregungsort im Koordinatenursprung. Materialdaten werden in diesem Koordinatensystem definiert. Die Kreisscheibe wurde als Form gewählt, um die Verschiebungen in Polarkoordinaten auswerten zu können und eine Einteilung in radiale  $u_1$  und tangential  $u_2$  Richtung zu ermöglichen. Werden Punkte ausgewertet, geschieht dies auf der Plattenoberfläche und entweder auf einem festen Radius  $R$ , wie bei den Messpunkten auf der Abbildung, oder bei einem festen Winkel  $\phi$ . Im letzteren Fall ergeben sich B-Bilder, die auch bei der Auswertung von Ultraschallmessungen üblich sind. Damit lässt sich die Wellenausbreitung entlang einer Achse leicht visualisieren.

Bei 2D-Modellen wird ein Plattenquerschnitt abgebildet indem ein ebener Verschiebungszustand verwendet wird. Die berechneten Wellenausbreitungen geben das Verhalten einer

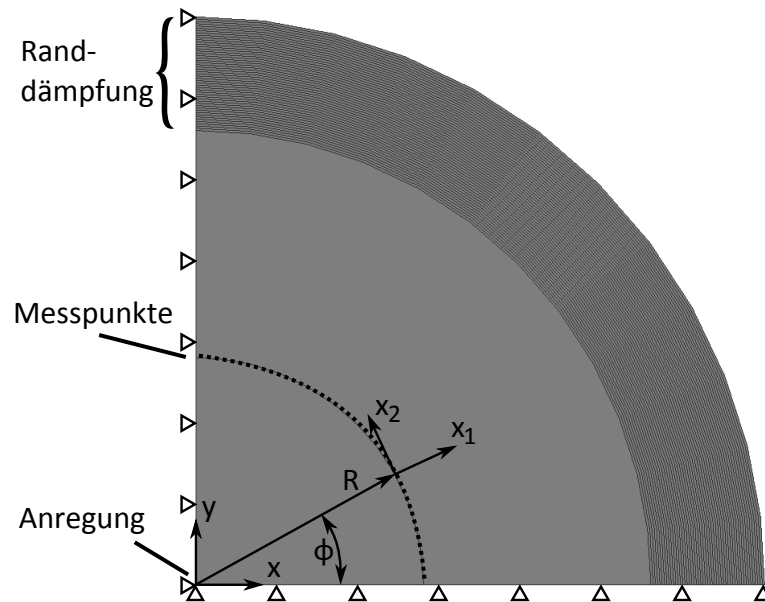


Abbildung 4.1: Prinzipieller Aufbau des 3D-Modells in der Draufsicht.

ebenen Wellenfront dar, die sich parallel zur  $x$ -Achse des Modells ausbreitet. Die Wellenfront ist wiederum parallel zur dritten Raumrichtung, die nicht abgebildet wird und auch eine unbegrenzte Geometrie in diese Richtung wiedergibt. Durch den ebenen Verschiebungszustand sind die Auslenkungen in die nicht modellierte Tiefenrichtung per Definition Null, obwohl in anisotropen Werkstoffen durchaus solche Auslenkungen auftreten. Es werden mit einer solchen Simulation also nur zwei Komponenten der dreidimensionalen Schwingung bestimmt.

Der absorbierende Rand wird aufgebaut indem für jede Schicht des Laminats und jeden Abschnitt mit neuen Dämpfungseigenschaften ein neues Material definiert wird. Dies ist exemplarisch in Abbildung 4.2 dargestellt. Es ist ein Viertel der Geometrie abgebildet, wodurch die Schichten des Laminats sichtbar werden. Die Farben verdeutlichen Bereiche gleicher Materialeigenschaften. Der äußere Rand besteht aus Bereichen anwachsender Dämpfung. Aufgrund der begrenzten Farbskala wiederholen sich die Farben trotz unterschiedlicher Materialkennwerte.

Sowohl bei 2D- als auch 3D-Modellen werden die Schichten eines Laminats einzeln modelliert, da sie entscheidenden Einfluss auf die Ausbreitung von Lamb-Wellen haben können. Um die Modellgröße zu reduzieren, werden nach Möglichkeit Symmetrierandbedingungen verwendet, indem eine Verschiebung normal zur Symmetrieebene verhindert wird. Dabei muss beachtet werden, dass durch die anisotropen Materialeigenschaften die geometrische Symmetrie nicht unbedingt eine Symmetrie im Wellenfeld zur Folge hat. In Abbildung 5.2 ist beim  $A_0$ -Mode eine horizontale Symmetrieachse durch den Mittelpunkt sichtbar. Eigentlich handelt es sich dabei um Anti-Symmetrie, da die gegenüberliegenden Wellenpakete genau  $180^\circ$  in der Phase versetzt sind. Entscheidend ist jedoch die orthogonale Auslenkung  $u_2$ , die an dieser Stelle Null ist und damit an dieser Stelle eine Symmetrierandbedingung zulässt. Dies ist in der gleichen Situation für den  $S_0$ -Mode nicht der Fall. Hier liegen entsprechende Achsen bei  $\pm 45^\circ$ .

Für die Berechnung von Lamb-Wellen im Bereich von 50..300 kHz haben sich für die absorbierende Randschicht Werte von  $\zeta = 0.03 \text{ s}^{-1}$  und  $\zeta = 1.3$  als wirksam erwiesen. Der



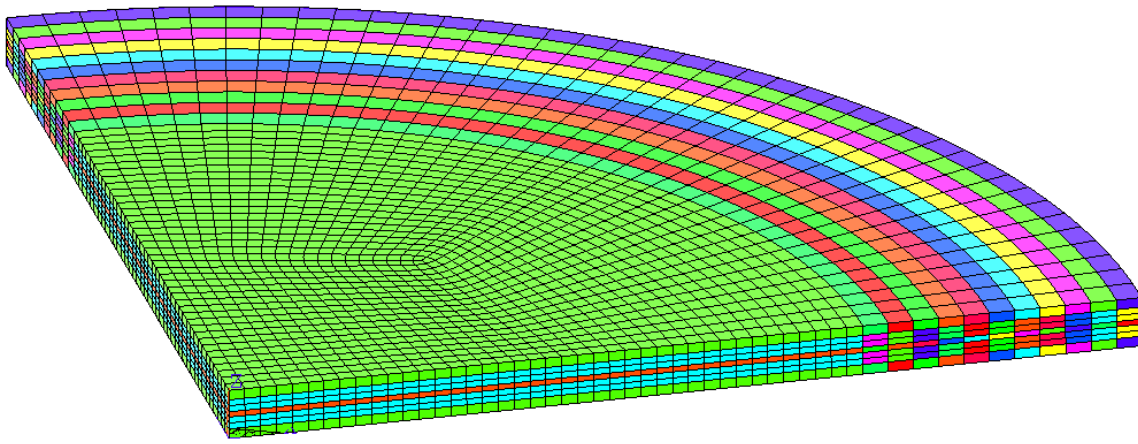


Abbildung 4.2: 3D-Modell einer Platte aus geschichtetem Faserverbundmaterial. Dargestellt sind die Elemente und farblich deren Material (gleiche Farben bedeuten nicht zwangsweise gleiches Material)

absorbierende Rand ist je nach gewünschter Genauigkeit zwischen 20 und 50 Elemente lang. Da bei transienten Analysen Reflexionen an dieser Art der absorbierenden Randschicht nicht komplett ausgeschlossen werden können und die Anzahl der Freiheitsgrade entscheidend auf die Rechenzeiten einwirken, empfehlen sich hier 20 Elemente (siehe Abschnitt 6). Bei harmonischen Analysen sind es die Randbedingungen, die global die Genauigkeit der Lösung bestimmen. Folglich sollten hier eher 50 Elemente verwendet werden, um Reflexionen zu minimieren.

Für eine ausreichende Genauigkeit bei der Berechnung von Lamb-Wellen muss die räumliche Diskretisierung fein genug sein, um die kleinste relevante Wellenlänge abbilden zu können. Diese lassen sich vor einer Simulation mit unterschiedlichsten Verfahren berechnen. Vom Autor wird das DLR-interne Programm DISPLAM von Jens Baaran verwendet [10]. Dabei ist auf die Richtungsabhängigkeit der Phasengeschwindigkeiten in anisotropen Materialien zu achten. Die Anregungsfrequenz  $f_0$  und die zugehörige Wellenlänge  $\lambda_0$  wird dabei als Richtwert für die Festlegung der Elementabmessungen verwendet, da sich die Energie der Anregung um  $f_0$  konzentriert. Infolge des dispersiven Verhaltens der Lamb-Wellen in Kombination mit den Grenzfrequenzen der genutzten Filter von  $0,5f_0$  bis  $2f_0$  ist die kleinste auftretende Wellenlänge größer als  $0,5\lambda_0$ . Die beiden im untersuchten Frequenzbereich auftretenden Wellenmoden  $A_0$  und  $S_0$  können mit entgegen- bzw. gleichgerichteten Kräftepaaren auf Ober- und Unterseite der Platte selektiv angeregt werden. Modenkonzersion kann in den betrachteten Platten nicht auftreten, da diese in Ausbreitungsrichtung stetig sind. Folglich müssen Elementlängen nur in Abhängigkeit eines Modes festgelegt werden. In der Vergangenheit haben sich fünf Elemente pro Wellenlänge  $\lambda_0$  als ausreichend herausgestellt [11]. Da es sich um Elemente mit quadratischer Ansatzfunktion handelt, ergibt dies mindestens zehn Knoten pro Wellenlänge. Die kleinste auftretende Wellenlänge bei  $2f_0$  wird damit mit mindestens fünf Knoten abgebildet. Im Fall von transienten Vorgängen muss zusätzlich die zeitliche Auflösung hoch genug für die Abbildung der zeitlichen Änderungen sein. Im Gegensatz zu expliziten Berechnungsverfahren muss die Zeitschrittweite beim verwendeten impliziten Verfahren nicht zusätzlich in Abhängigkeit von Stabilitätskriterien angepasst werden [12]. Hier haben sich zwanzig Schritte pro Schwingungsperiode der Anregungsfrequenz als ausreichend genau erwiesen [11].

## 5 Die absorbierende Randschicht in der harmonischen Analyse

### 5.1 Harmonische Analysen in der FEM

Bei der harmonischen Analyse wird der eingeschwungene Zustand einer monofrequent angeregten Struktur berechnet. Normalerweise untersucht man damit das Schwingungsverhalten eines klar begrenzten Bauteils. Mit den absorbierenden Randschichten ist es jedoch auch möglich unbegrenzte Strukturen zu berechnen. Dies ist vergleichbar mit komplexen Eigenformen bei Bauteilen mit lokaler Dämpfung [13]. Im eingeschwungenen Zustand werden im Zentrum der Platte monofrequent und kontinuierlich Wellen angeregt und die sich zum Rand der Platte hin ungestört ausbreiten und dort reflexionsfrei verschwinden. Während die Ergebnisse bei einer transienten Berechnung aus Zeitsignalen der Auslenkung für jeden berechneten Freiheitsgrad bestehen, ergeben sich bei der harmonischen Analyse jeweils komplexwertige Auslenkungen  $u$ . Mit Real- und Imaginärteil können die maximale Amplitude  $A$  und der Phasenwinkel  $\varphi$  der Schwingung eines Knoten berechnet werden.

$$A = |u| = \sqrt{\operatorname{Re}(u)^2 + \operatorname{Im}(u)^2} \quad (5.1)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(u)}{\operatorname{Re}(u)}\right) \quad (5.2)$$

$$u = Ae^{i\varphi} = A(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (5.3)$$

Wie in Abbildung 5.2 zu sehen ist, ergeben sich bei der harmonischen Analyse anisotroper Platten komplizierte Wellenfelder. Um sicher zu gehen, dass die Muster eine Folge des anisotropen Materials und nicht durch Reflexionen am absorbierenden Rand entstanden sind, wird mit transienten Verfahren, wie in Abschnitt 6 beschrieben, der Einschwingvorgang berechnet. Dazu erfolgt die Anregung, im Gegensatz zu den Simulationen in Abschnitt 6, kontinuierlich mit einem Sinus. Als Vergleich wurde das gleiche System mit und ohne absorbierenden Rand simuliert (Abb. 5.1). Die CFK-Platte besteht in diesem Versuch aus einer einzigen unidirektionalen (UD) Schicht mit einer Stärke von 1 mm. Die Fasern sind in  $0^\circ$ , also parallel zur x-Achse, ausgerichtet. Die Auswertung erfolgt in Richtung  $45^\circ$ , 2 mm vom Rand entfernt. Im Fall ohne absorbierende Schicht befindet sich beim Ende der Platte anstelle der Randschicht eine feste Einspannung, um Starrkörperverschiebungen zu verhindern. Im Modell mit absorbierender Randschicht (NRB) bildet sich schnell ein eingeschwungener Zustand aus. Ohne die Schicht ist ein solcher Zustand, trotz langer Simulationszeit, nicht zu erkennen.



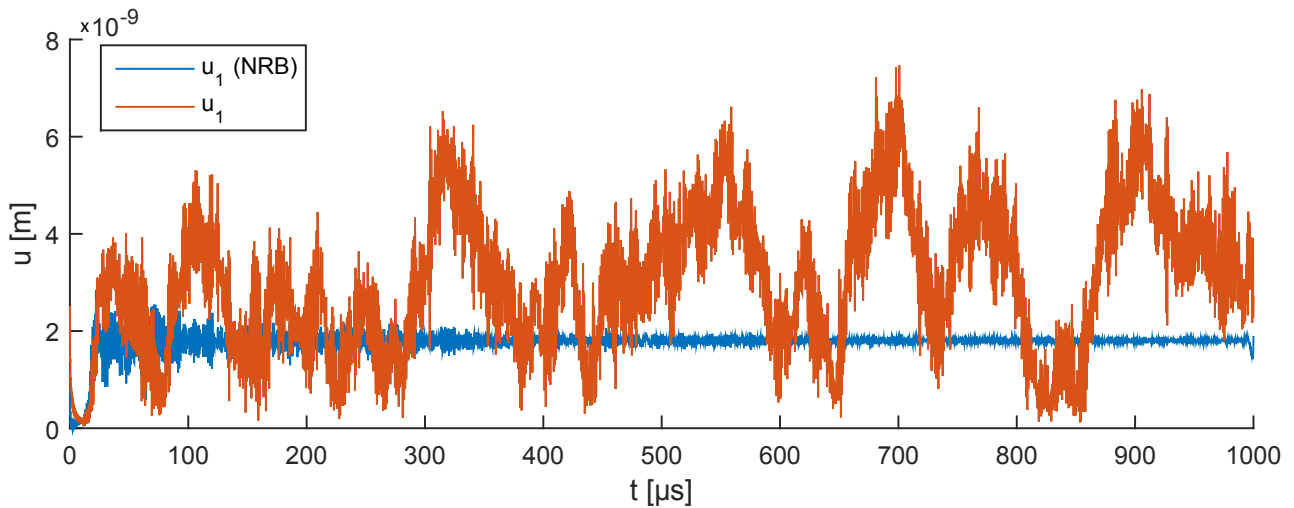


Abbildung 5.1: Transientes Verhalten bei harmonischer Anregung. NRB bezeichnet das Modell mit absorbierender Randschicht. Dargestellt ist die Einhüllende des Signals. (100 kHz, UD-Material,  $S_0$ -Mode,  $\phi=45^\circ$ ,  $R=48$  mm)

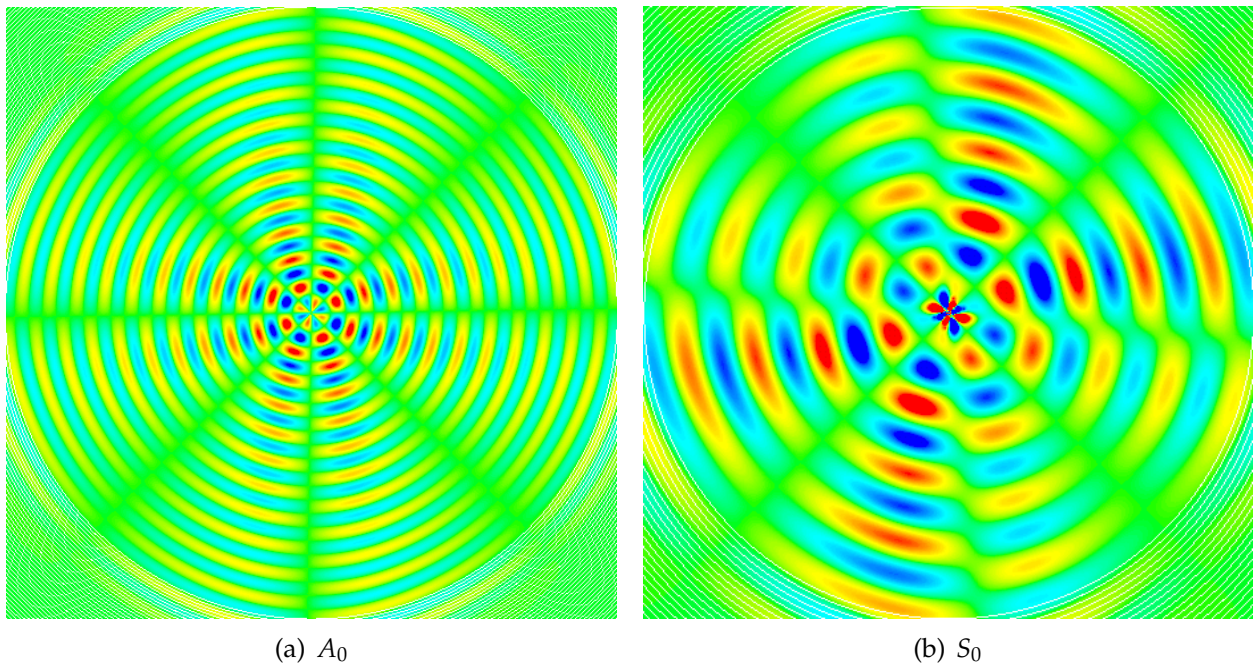


Abbildung 5.2: Wellenfeld bei harmonischer Analyse (300 kHz, Realteil der tangentialen Auslenkung  $u_2$ , quasi-isotropes CFK-Laminat)

## 5.2 Anwendung UD-CFK-Platte

Praktisch genutzt wurde die harmonische Analyse mit absorbierender Randschicht bei der Überprüfung eines Ansatzes auf Basis der Steifigkeitsmatrizen-Methode (SMM) [14]. Dieses Verfahren ist geeignet um Auslenkungsverhältnisse in Laminaten unter harmonischer Anregung zu bestimmen. Im Artikel sind Ergebnisse von UD-Platten für verschiedene Frequenzen aufgeführt. Das SMM-basierte Verfahren bildet von vornherein unbegrenzte Platten ab. Infolge des UD-CFK-Materials ist die hierbei untersuchte 1 mm dicke Platte stark anisotrop. Materialdaten sind in Tabelle 5.2 gelistet. Durch Symmetrie sowohl bei Geometrie als auch bezüglich der Materialeigenschaften, kann das Modell auf ein Viertel der gesamten Platte reduziert werden. Einzelne Richtungen  $\phi$  werden mit der SMM jeweils als ebenes Wellenfeld berechnet. Dies erklärt die Unterschiede zu den FEM-Ergebnissen, da hier stets die Fläche komplett simuliert wird. Angrenzende Wellen, die sich in unterschiedliche Richtungen ausbreiten, beeinflussen sich gegenseitig. Zusätzlich liegen die Messpunkte auf einem festen Radius (siehe Abb. 4.1), während insbesondere beim UD-Material die Wellenfronten eher oval sind. Wie in Abbildung 5.3 zu erkennen ist, ergeben sich dadurch Nulldurchgänge, die für die einzelnen Verschiebungskomponenten nicht exakt an den gleichen Positionen liegen. Wird dann ein Verschiebungsverhältnis gebildet ergeben sich Ausreißer. Für den Vergleich beider Methoden wurden die FEM-Ergebnisse gefiltert, um diese Ausreißer zu entfernen. Mit den Ergebnissen konnte der SMM-basierte Ansatz prinzipiell bestätigt werden, auch wenn die oben beschriebenen Unterschiede zwischen FEM und SMM einen Vergleich teilweise erschweren. In Abbildung 5.4 wird das Verhalten der Moden in Abhängigkeit der Ausbreitungsrichtung bei stark anisotropen Materialien sichtbar. In  $0^\circ$  und  $90^\circ$  bilden sich reine  $A_0$ - bzw.  $S_0$ -Moden aus, die nur in Ausbreitungsrichtung und normal zur Oberfläche schwingen. Bei anderen Winkeln treten auch tangentiale Auslenkungen  $u_2$  auf. Weitere Ergebnisse und Vergleiche können dem Artikel entnommen werden.

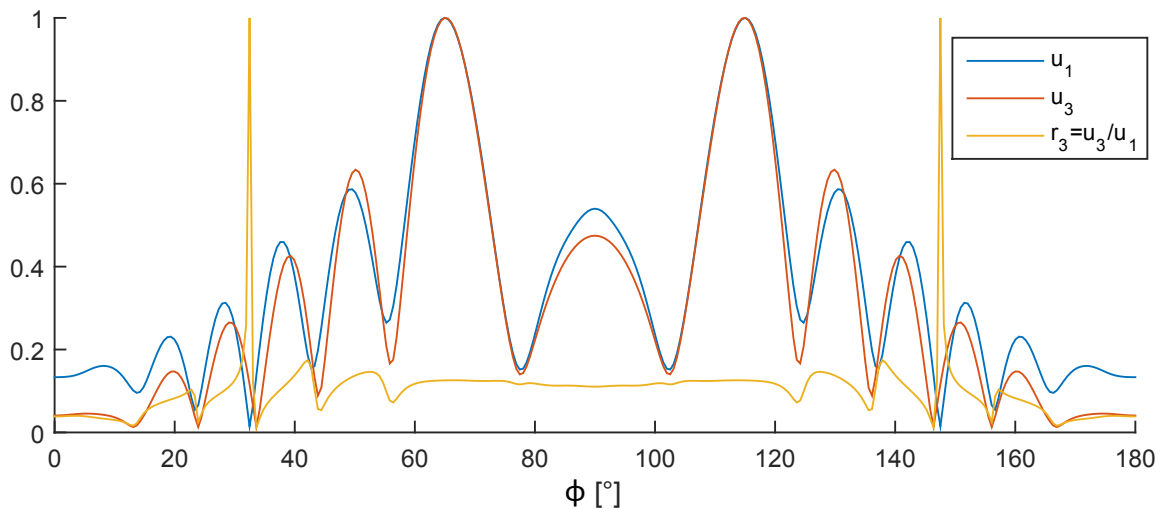
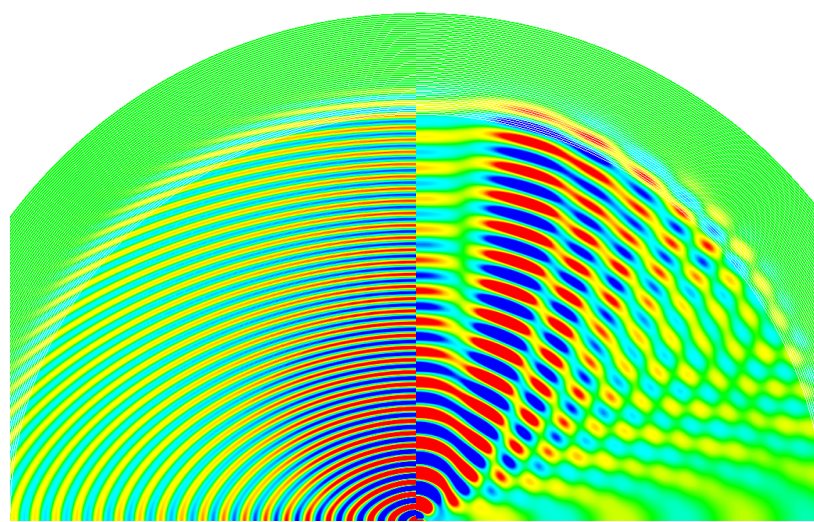
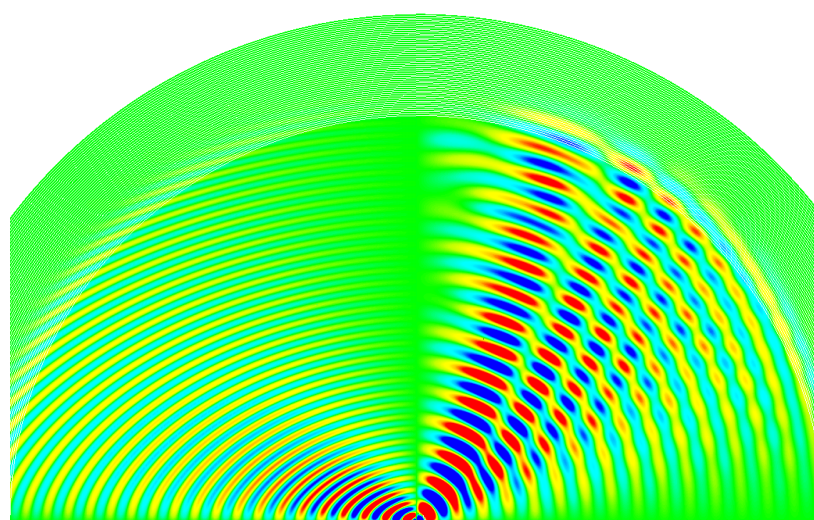


Abbildung 5.3: Amplitude der Auslenkung bei harmonischer Anregung, normiert auf Eins. (300 kHz, UD-Material,  $S_0$ -Mode,  $R=50$  mm)



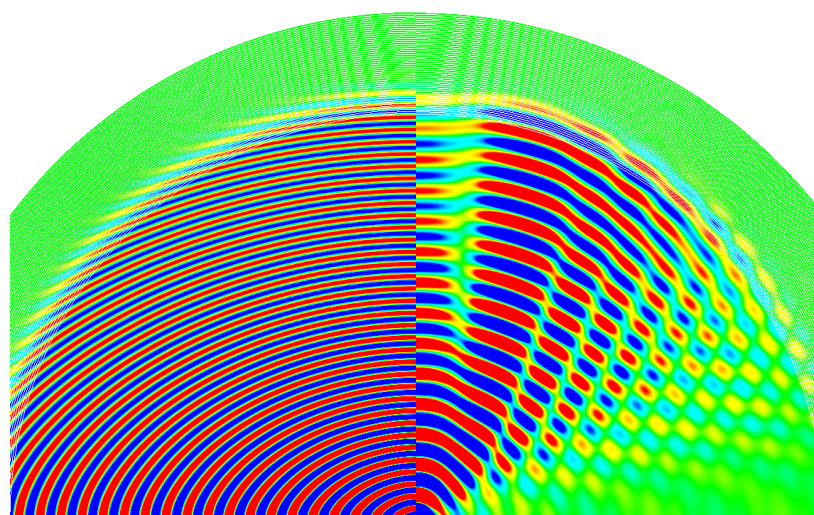
(a)  $A_0, u_1$

(b)  $S_0, u_1$



(c)  $A_0, u_2$

(d)  $S_0, u_2$



(e)  $A_0, u_3$

(f)  $S_0, u_3$

Abbildung 5.4: Wellenfeld bei harmonischer Analyse einer CFK-UD-Schicht (300 kHz, Realteil)



### 5.3 Anwendung quasi-isotrope CFK-Platte

Anwendungen in Luft- und Raumfahrt verwenden äußerst selten Strukturmaterialien mit so stark gerichteten Eigenschaften, wie bei der vorher betrachteten Platte aus reinem UD-Material. Aufbauend auf den Ergebnissen des vorherigen Abschnitts, wird in diesem Abschnitt eine quasi-isotrope Platte behandelt. Der Lagenaufbau des Laminats ist dabei so gewählt, dass die Steifigkeit möglichst in alle Richtungen gleich ist. Tabelle 5.1 enthält den Lagenaufbau und Tabelle 5.2 die Kennwerte der drei verwendeten Materialien. Der Aufwand bei der Simulation solcher Lamine ist aus mehreren Gründen höher als bei der Platte aus einer einzelnen UD-Lage. Erstens wird jede Schicht einzeln modelliert. Dies vervielfacht sowohl bei der eigentlichen Platte als auch in der absorbierenden Randschicht die Anzahl der benötigten Elemente. Zweitens kann nicht ohne weiteres die Symmetrie der Platte ausgenutzt werden, um die Modellgröße zu verringern, wie dies bei einer reinen UD-Platte der Fall ist (siehe dazu auch Abb. 5.2 sowie Abschnitt 4.2). Bei den mit der SMM bestimmten Auslenkungen handelt es sich um die Amplituden der Schwingung (Gl. 5.2). Analog werden auch bei den FEM-Ergebnissen zur geschichteten Platte die Auslenkungsamplituden angegeben (Abb. 5.5). Die weniger stark gerichteten Eigenschaften der quasi-isotropen Platte haben nahezu kreisförmige Wellenfronten zur Folge. Dadurch sind, anders als bei der UD-Platte, keine Ausreißer in den Ergebnissen sichtbar.

Lagennr.	Kurzbezeichnung	Aufbau	Schichtdicke [mm]
1	(0/90) <sub>f</sub>	Gewebe (Köper 2/2)	0,40
2	+45	UD	0,25
3	-45	UD	0,25
4	(0/90) <sub>f</sub>	Gewebe (Leinwand)	0,22
5	-45	UD	0,25
6	+45	UD	0,25
7	(0/90) <sub>f</sub>	Gewebe (Köper 2/2)	0,40

Tabelle 5.1: Laminataufbau der verwendeten CFK-Platten

Aufbau	$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$E_1$ [GPa]	$E_2$ [GPa]	$E_3$ [GPa]	$\nu_{12}$ [-]	$\nu_{13}$ [-]	$\nu_{23}$ [-]	$G_{12}$ [GPa]	$G_{13}$ [GPa]	$G_{23}$ [GPa]
Gewebe (Köper 2/2)	1,52	49,64	49,64	8,11	0,030	0,322	0,322	3,56	2,67	2,67
Gewebe (Leinwand)	1,56	53,36	53,36	8,39	0,030	0,319	0,319	3,83	2,87	2,87
UD	1,55	127,45	7,90	7,90	0,273	0,273	0,348	5,58	5,58	2,93

Tabelle 5.2: Materialdaten

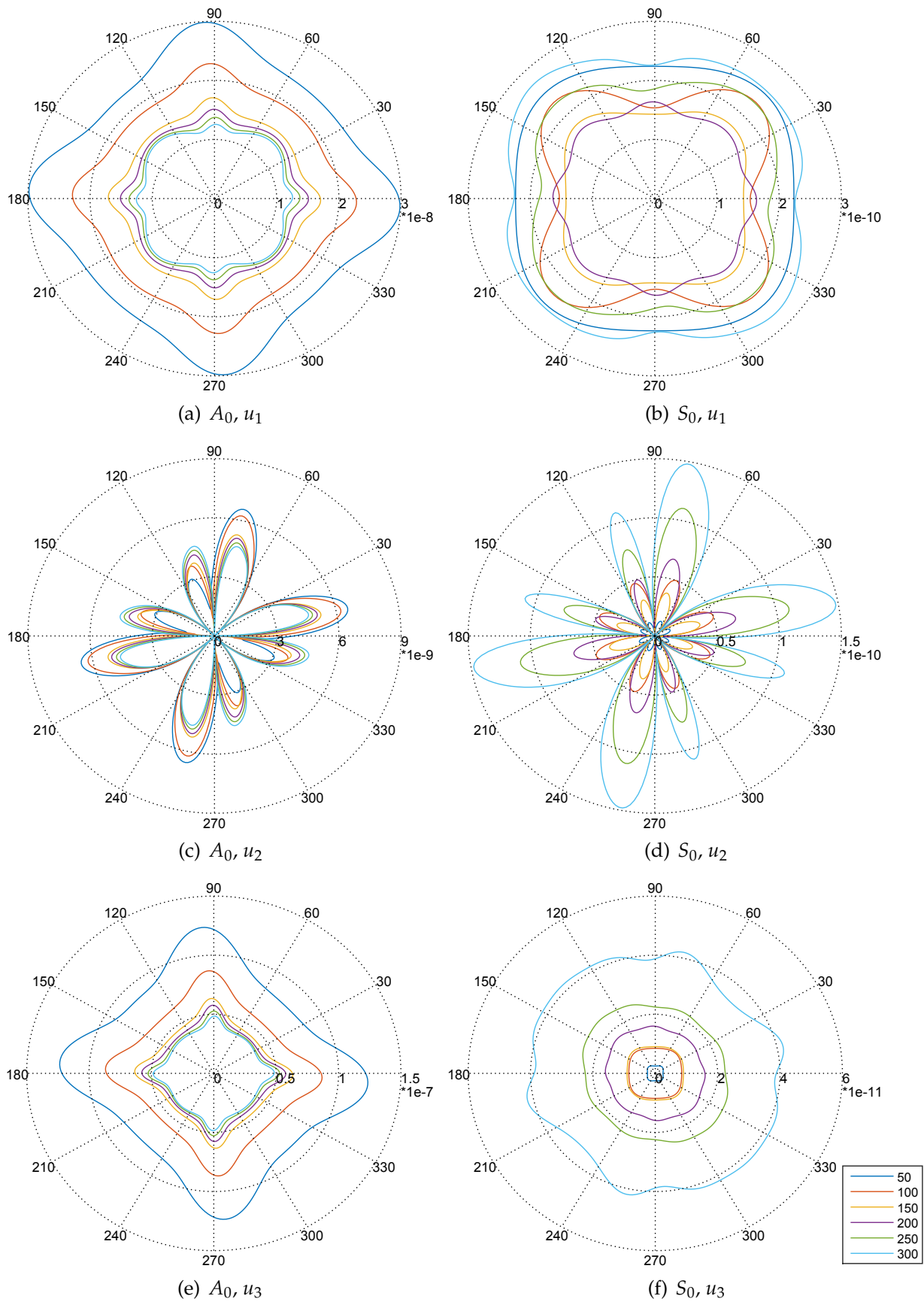


Abbildung 5.5: Auslenkungsamplituden ( $f=50..300$  kHz, quasi-isotrope CFK-Platte,  $R=50$  mm)

Im Gegensatz zur FEM können mit der SMM nur Auslenkungsverhältnisse berechnet werden. Entsprechend sind, ähnlich den Untersuchungen an der UD-Platte in [14], die Ergebnisse zusätzlich als Polarisationswinkel  $\Theta$  und Auslenkungsverhältnis  $r_3$  dargestellt (Abb. 5.6).

$$\Theta = \arctan \left( \frac{|u_2|}{|u_3|} \right) \quad (5.4)$$

$$r_3 = \frac{|u_3|}{|u_1|} \quad (5.5)$$

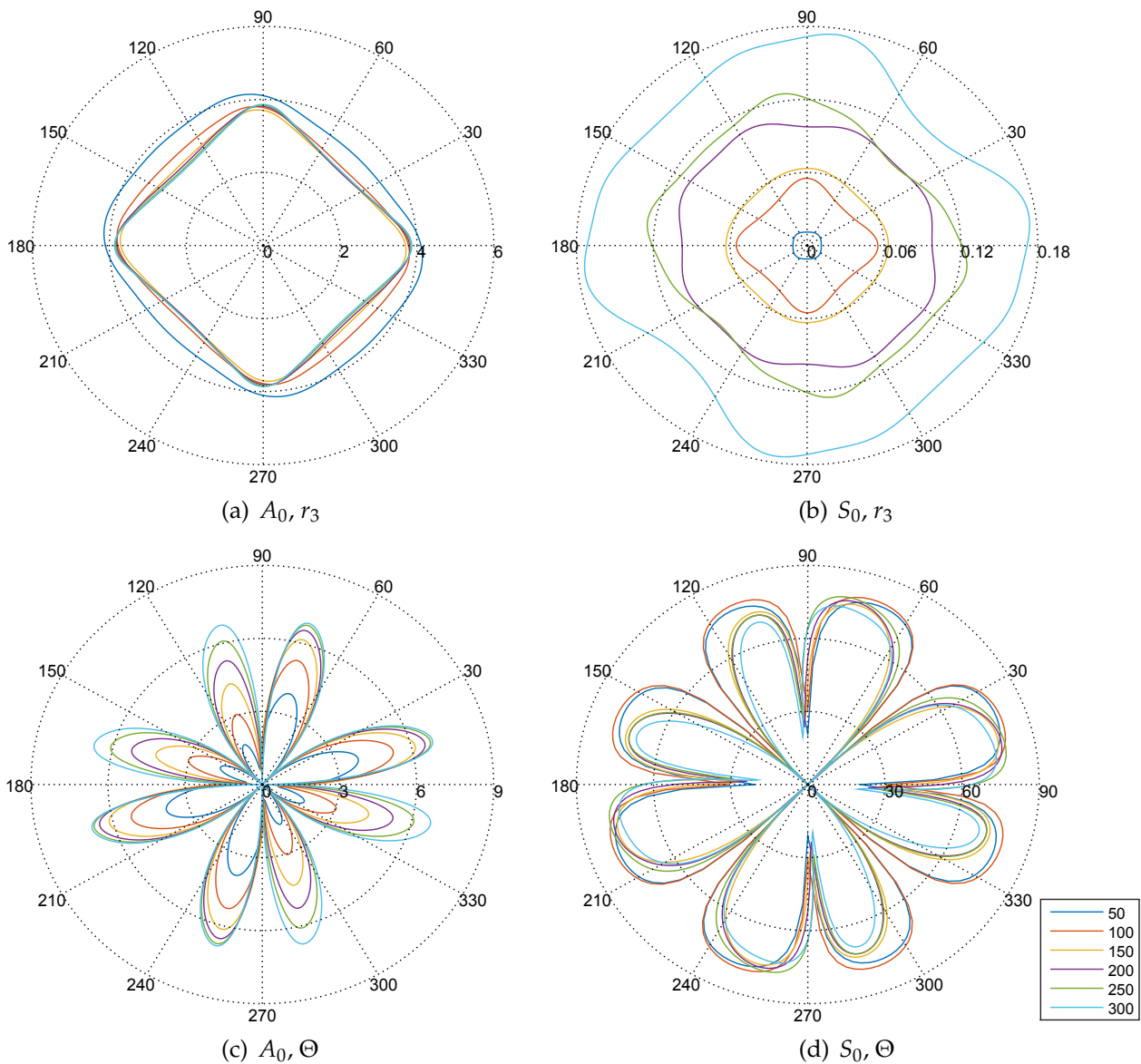


Abbildung 5.6: Auslenkungsverhältnis  $r_3$  und Polarisationswinkel  $\Theta$   
( $f=50..300$  kHz, quasi-isotrope CFK-Platte,  $R=50$  mm)

## 6 Die absorbierende Randschicht in der transienten Analyse

Für die transiente Analyse der Ausbreitung von Lamb-Wellen in anisotropen Werkstoffen werden vom Autor implizite Berechnungsverfahren gegenüber den expliziten bevorzugt. Hauptargument ist die Flexibilität der Methode, wodurch es beispielsweise direkt möglich ist mechanische und piezoelektrische Systeme zu koppeln [15]. Von Liu und Quek Jerry wird die absorbierende Randschicht für harmonische Analysen verwendet. Allerdings kann der gleiche Ansatz auch direkt bei transienten Berechnungen verwendet werden. Im Gegensatz zur harmonischen Analyse, kann es bei transienten Simulationen gelegentlich ausreichen statt eines speziellen nicht-reflektierenden Randes einen Teil des offenen Bereiches zu modellieren. Insbesondere wenn nur kurze Zeitbereiche von Interesse sind, kann dies genügen, um unerwünschte Reflexionen zu vermeiden. In den meisten Fällen wird die absorbierende Randschicht allerdings effizientere Modelle ermöglichen. Zum einen aufgrund der geringeren Abmessungen der Geometrie und andererseits wegen der Möglichkeit einer größeren Versetzung in der Randschicht. Da in deren Bereich keine Ergebnisse ausgewertet werden, können die Elemente größere Abmessungen besitzen, ohne dass die Genauigkeit beeinflusst wird. Ein deutlicher Sprung in den Elementlängen sollte vermieden werden, damit es zu keinen numerisch bedingten Reflexionen kommt.

In Gleichung 4.5 wurde festgelegt, dass der Dämpfungskoeffizient von der Anregungsfrequenz  $f_0$  abhängt. Bei einer transienten Anregung besitzt das endliche Anregungssignal jedoch ein breites Frequenzspektrum. Die Ergebnisse werden meistens im Zeitbereich gefiltert, wodurch das Spektrum auf den Bereich von  $0,5f_0$  bis  $2f_0$  begrenzt ist. Die Randschicht muss nicht exakt auf eine Frequenz eingestellt werden, um zu funktionieren. Vielmehr sorgt das Anpassen des Dämpfungsfaktors für ähnliches Dämpfungsverhalten über alle Frequenzen. Prinzipiell funktioniert eine einmal definierte Schicht für einen gewissen Frequenzbereich. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die gewählten Parameter aus Abschnitt 4.2 auch im transienten Fall zuverlässig arbeiten.

Eine CFK-UD-Platte wird mit einem kurzen Burst-Signal angeregt. Das Zeitsignal der Anregung besteht aus einem Sinus multipliziert mit einem Kosinus-Fenster. Das Signal und dessen Spektrum ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Die Platte besteht, wie bereits in Abschnitt 5.1, aus einer einzigen 1 mm dicken Schicht und besitzt einen Durchmesser von 100 mm. Die Anregung erfolgt im Zentrum der Platte mit einem Kräftepaar. Unter Ausnutzung von Symmetriebedingungen muss im Modell nur ein Viertel der eigentlichen Geometrie abgebildet werden. Ausgewertet werden erneut die Auslenkungen in  $45^\circ$ -Richtung, da hier die Wellenmoden Schwingungskomponenten in alle drei Raumrichtungen besitzen.

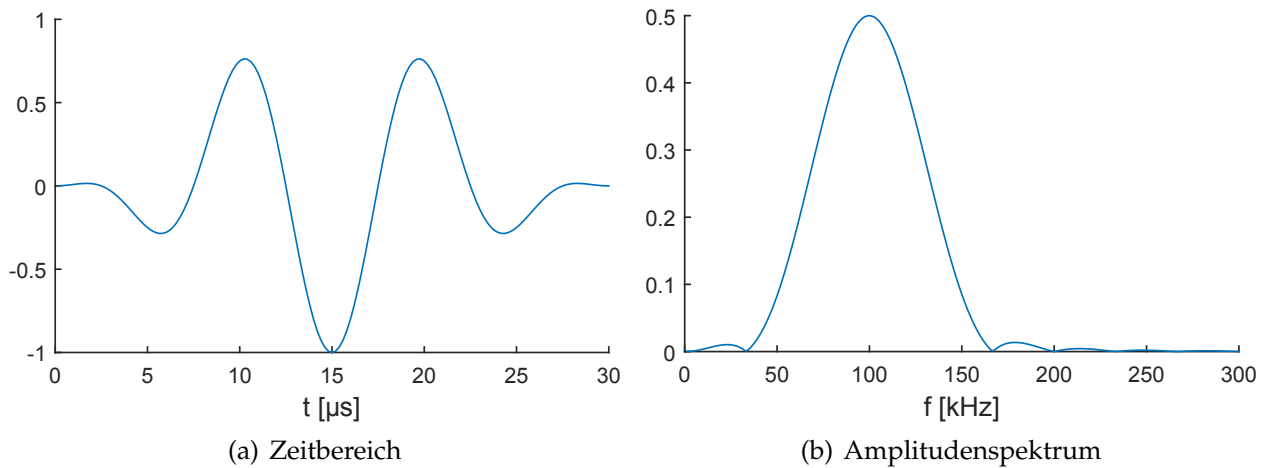


Abbildung 6.1: Anregungssignal bei FEM-Simulation (100 kHz)

Abbildung 6.2 verdeutlicht die Wirkung der absorbierenden Randschicht. Das Wellenpaket des  $A_0$ -Modes wird im ersten Fall vollkommen reflektiert. Mit der Randschicht sind dagegen keine Reflexionen mehr sichtbar. In Abbildung 6.2b ist ersichtlich, dass die Schwingungen bei 50 Elementen vor dem Ende der Geometrie bei 100 mm vollkommen abklingen. Bei der Position  $R=70$  mm, was dem Ende des Modells mit 20 Randelementen entspricht, sind dagegen noch Auslenkungen vorhanden, die reflektieren können. Allerdings durchlaufen diese anschließend erneut die Randschicht und werden weiter gedämpft, wodurch der Anteil, der den relevanten Teil des Modells erreicht, minimal wird.

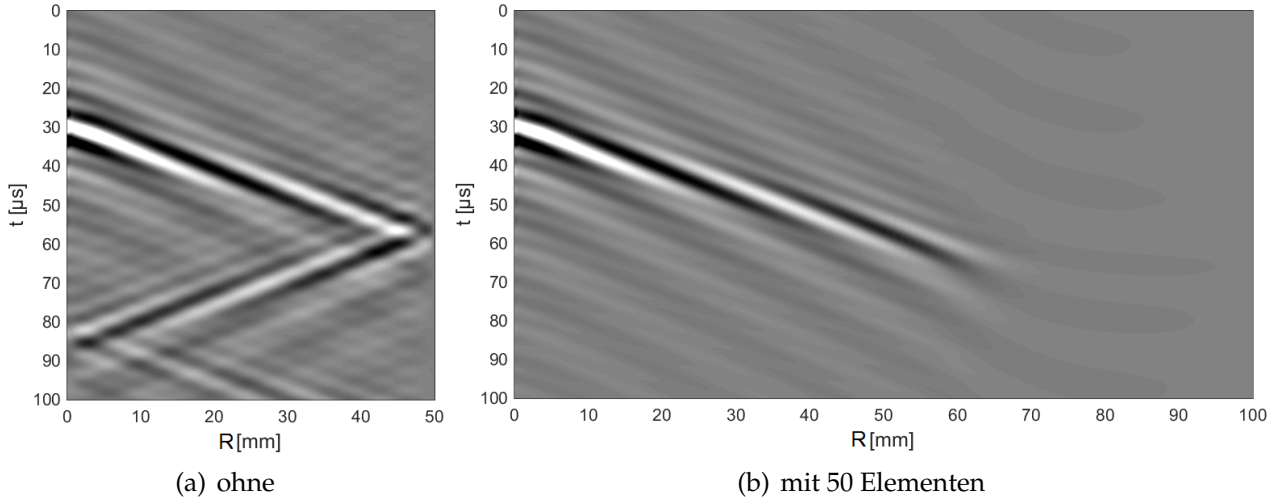


Abbildung 6.2: B-Bilder der Wellenausbreitung ohne und mit absorbierender Randschicht (100 kHz, UD-Material,  $A_0$ -Mode,  $\phi=45^\circ$ , gefiltert)

Für einen direkteren Vergleich sind in Abbildung 6.3 die Zeitsignale an einem Punkt auf halbem Weg zwischen Anregung und Ende der regulären Platte für unterschiedlich lange Randschichten dargestellt. Der offene Rand wird durch eine Verlängerung der Platte um



50 mm bzw. 200 mm für  $A_0$ - und  $S_0$ -Mode realisiert. Damit wird die Reflexion zwar verzögert, jedoch ist sie im Fall des schnelleren  $S_0$ -Modes am Ende des Zeitsignals sichtbar und erzeugt die Abweichung zum Signal mit absorbierender Randschicht. Zwanzig Elemente stellen für die transiente Analyse einen guten Kompromiss zwischen Rechenaufwand und Nachbildung einer unbegrenzten Platte dar. Eine größere Zahl an Elementen bringt keine nennenswerte Verbesserung.

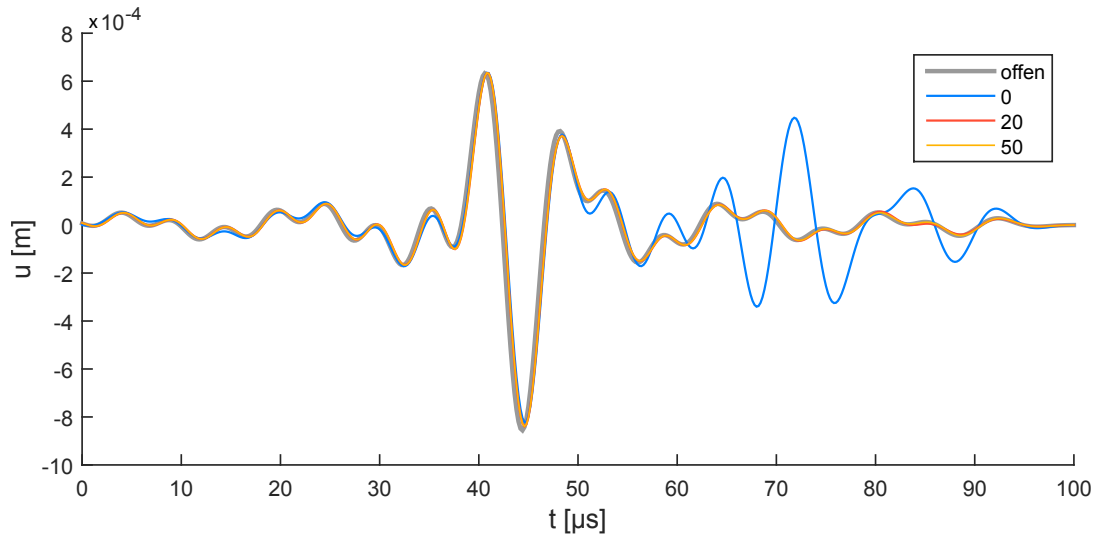
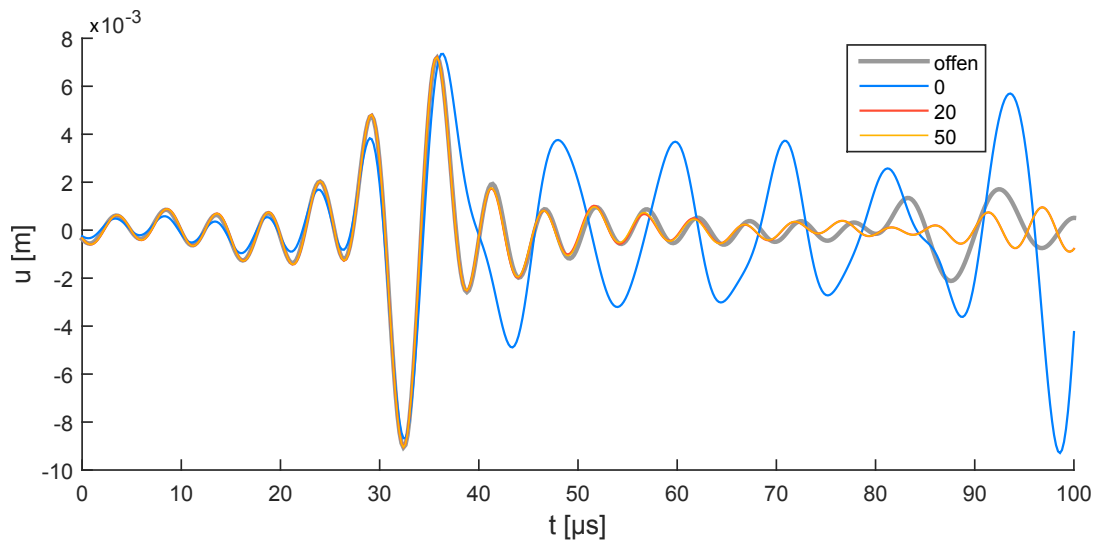

(a)  $A_0$ 

(b)  $S_0$ 

Abbildung 6.3: Zeitsignal in Abhängigkeit der Anzahl der Elemente der absorbierenden Randschicht und Vergleich mit einem offenen Rand (100 kHz, UD-Material,  $\phi=45^\circ$ ,  $R=25$  mm, gefiltert)

## 7 Zusammenfassung

Dieser wissenschaftliche Bericht stellt einen Ansatz zum Abbilden nicht-reflektierender Ränder bei dynamischen Problemstellungen in FEM-Programmen vor. Die absorbierende Randschicht auf Basis exponentieller Dämpfung kann mit geringem Aufwand in kommerzieller Software umgesetzt werden, solange Materialien mit unterschiedlicher Dämpfung zulässig sind. Im Gegensatz zu vielen anderen Ansätzen, müssen dazu keine neuen Funktionalitäten implementiert werden. Gleichzeitig ist diese Art des nicht-reflektierende Randes flexibel genug für die Verwendung in verschiedenen Analysemethoden. Vorgestellt wird der Einsatz in harmonischen Analysen und transienten Simulationen von anisotropen Platten. Vorgeschlagen werden Dämpfungseigenschaften, die unabhängig von der Frequenz sind und konkrete Parameter für die Anwendung bei Lamb-Wellen-Ausbreitung. Abgeglichen wurde der Ansatz mit einem Verfahren basierend auf der Steifigkeitsmatrizen-Methode, das die Auslenkungsverhältnisse in anisotropen Laminaten bei harmonischer Anregung bestimmt. Die Auswertung der FEM-Resultate im simulierten UD-Material stellt eine besondere Herausforderung durch die stark gerichteten Eigenschaften des Werkstoffs dar. Neue Ergebnisse in geschichteten CFK-Platten mit quasi-isotropem Aufbau werden präsentiert. Zusätzlich zu harmonischen Berechnungen kann die Randschicht ohne größere Modifikationen auch für transiente Vorgänge verwendet werden. Die Wirksamkeit der Schicht als künstliche Nachbildung eines offenen Randes wird gezeigt und der Einfluss der Länge des dämpfenden Bereichs diskutiert.

## Literatur

- [1] Daniel Appelö. »Absorbing Layers and Non-Reflecting Boundary Conditions for Wave Propagation Problems«. PhD thesis. Sweden: Kungliga Tekniska Högskolan (KTH), Okt. 2005.
- [2] O.C. Zienkiewicz, C. Emson und P. Bettess. »A novel boundary infinite element«. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 19.3 (1983), S. 393–404.
- [3] Steven G. Johnson. »Notes on perfectly matched layers (PMLs)«. In: *Lecture notes, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts* (2008).
- [4] Ushnish Basu und Anil K. Chopra. »Perfectly matched layers for transient elastodynamics of unbounded domains«. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 59.8 (2004), S. 1039–1074.
- [5] Loukas F. Kallivokas, Jacobo Bielak und Richard C. MacCamy. »Symmetric local absorbing boundaries in time and space«. In: *Journal of engineering mechanics* 117.9 (1991), S. 2027–2048.
- [6] C. Wang und J.C.S. Lai. »Modelling the Vibration Behaviour of Infinite Structures by FEM«. In: *Journal of Sound and Vibration* 229.3 (2000), S. 453–466.
- [7] G.R. Liu und S.S. Quek Jerry. »A non-reflecting boundary for analyzing wave propagation using the finite element method«. In: *Finite elements in analysis and design* 39.5 (2003), S. 403–417.
- [8] Horace Lamb. »On Waves in an Elastic Plate«. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* 93.648 (1917), S. 114–128.
- [9] Igor Aleksandrovich Viktorov. *Rayleigh and Lamb Waves: Physical Theory and Applications*. Plenum Press, New York, 1967.
- [10] Jens Baaran. *DISPLAM - Programm zur Berechnung von Dispersionsdiagrammen geschichteter Plattenstrukturen*. Entwicklung des DLR - Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik. 2009.
- [11] Christoph Heinze. »Finite Elemente Modellierung zur monomodalen Anregung von Lambwellen in Faserverbundplatten«. Studienarbeit. FMB, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Aug. 2010.
- [12] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor und J.Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis & Fundamentals*. 6. Aufl. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2010.
- [13] O. Unruh, M. Sinapius und H. P. Monner. »Sound Radiation Properties of Complex Modes in Rectangular Plates: A Numerical Study«. In: *Acta Acustica united with Acustica* 101.1 (2015), S. 62–72.

- [14] A. Szewieczek, C. Heinze und M. Sinapius. »Guided Wave Displacement Validation for SHM Applications using Air Coupled Ultrasonic Scanning Technique«. In: *Proceedings of the 10th International Workshop on Structural Health Monitoring (IWSHM 2015)*. Stanford, CA, USA, 2015.
- [15] C. Heinze. »Reduction of Model Complexity in Aerospace Structures with the Help of Approximated Stiffeners«. In: *Proc. IWSHM*. 2013, S. 2496–2503.